

Zur Quantentheorie nichtlinearer Wellengleichungen

IV. Elektrodynamik

Von R. ASCOLI * und W. HEISENBERG

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforschg. 12 a, 177–187 [1957]; eingegangen am 6. Dezember 1956)

Die Analyse der als Modell für eine Theorie der Elementarteilchen benützten nichtlinearen Spinorgleichung wird fortgeführt. Insbesondere werden die Kräfte langer Reichweite, die nach einer früheren Arbeit zwischen den Elementarteilchen des Modells wirksam sind, genauer untersucht. Dabei stellt sich heraus, daß diese Kräfte mit den COULOMB-Kräften formal identisch sind und daß die nichtlineare Spinorgleichung ganz allgemein die Elektrodynamik enthält, wobei der Wert der Elementarladung durch die Grundgleichungen festgelegt ist. Für die SOMMERFELDSche Feinstrukturkonstante des Modells ergibt die (noch ziemlich grobe) Näherungsrechnung den Wert $1/267$. Im dritten Teil der Arbeit wird untersucht, wie das Modell durch Einführung des Isotopenspins in Richtung auf eine Theorie der wirklichen Elementarteilchen erweitert werden könnte. Dabei werden Argumente dafür gefunden, daß bei den für den radioaktiven Zerfall maßgebenden schwachen Wechselwirkungen die Parität nicht notwendig erhalten bleiben muß, wie es die Erfahrungen über den Zerfall der τ -Mesonen zu zeigen scheinen.

In einigen früheren Arbeiten ^{1–5} wurde die Gleichung

$$\gamma_\nu \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} + l^2 \psi (\psi^* \psi) = 0 \quad (1)$$

zusammen mit einer Abänderung der Quantisierungsvorschriften als ein Modell für eine zukünftige Theorie der Elementarteilchen untersucht. Insbesondere wurde die Theorie in III mathematisch ausführlich dargestellt, die Massen der einfachsten Elementarteilchen berechnet und ein Verfahren zur Behandlung der Wechselwirkung der Elementarteilchen angegeben. Diese Untersuchungen sollen in der vorliegenden Arbeit fortgesetzt werden. Die Berechnung der Kräfte langer Reichweite, die in III, Abs. 2 c, nicht vollständig durchgeführt wurde, soll hier abgeschlossen werden. Ferner sollen verschiedene mathematische Fragen besprochen und die Erweiterung der Theorie durch Einführung des Isotopenspins erörtert werden. In den Bezeichnungen schließen wir uns vollständig an die Arbeit III an.

1. Die Kräfte langer Reichweite

In der früheren Arbeit III wurde das Auftreten von Kräften langer Reichweite zwischen FERMI-Teilchen nachgewiesen und ihre spezielle Form auf einen

Operator O^S (vgl. III, S. 439) zurückgeführt. Dieser Operator wurde zunächst in einer zweifellos viel zu groben Näherung durch den Einheitsoperator ersetzt und daraus auf das Auftreten von Tensorkräften geschlossen. Es wurde aber auch schon darauf hingewiesen, daß eine genaue Berechnung des Operators O^S vielleicht zu den richtigen COULOMB-Kräften, d. h. zur Elektrodynamik führen könnte. Diese Lücke soll im folgenden ausgefüllt werden, indem zunächst einmal das allgemeine Verhalten des Operators, der eng mit dem „Vertex-Operator“ der Quantenelektrodynamik verwandt ist, auf Grund der relativistischen Invarianzforderungen untersucht wird.

a) Allgemeine Eigenschaften des Operators O^S

Der Operator kann im Graphenschema der Arbeit III im Anschluß an III, Abb. 16, durch den Graphen von Abb. 1 angedeutet werden. Die ersten beiden Indizes α und β beziehen sich auf die Stelle, an der jener für die Wechselwirkung charakteristische Zopf ansetzt ⁶. Die Indizes ρ und σ beziehen sich auf das ein- bzw. auslaufende FERMI-Teilchen.

Da der für die Wechselwirkung charakteristische Zopf einen Operator bedeutet, der [nach Ausweis von III, Gl. (99)] in bezug auf die Indizes α und β nur Glieder vom Tensorcharakter $(\gamma_{\mu\nu})_{\alpha\beta}$ bzw.

* Der Aufenthalt von R. ASCOLI in Göttingen wurde von dem „Consiglio Nazionale delle Ricerche“ (Rom) ermöglicht.

¹ W. HEISENBERG, Nachr. Göttinger Akad. Wiss. 1953, 111.

² W. HEISENBERG, Z. Naturforschg. 9 a, 292 [1954].

³ W. HEISENBERG, F. KORTEF u. H. MITTER, Z. Naturforschg. 10 a, 425 [1955]; im folgenden mit III zitiert.

⁴ W. HEISENBERG, Z. Phys. 144, 1 [1956].

⁵ W. HEISENBERG, Nachr. Göttinger Akad. Wiss. 1956, 27.

⁶ Rechnungen mit einer FERMI-Wechselwirkung, bei der solche zopfartigen Graphen behandelt werden, finden sich auch bei B. JOUVET, J. Math. 33, 201 [1954]; Nuovo Cim. 2, Suppl. 941 [1955].



$(\gamma_{\mu\nu} \gamma_5)_{\alpha\beta}$ enthält [hier ist $\gamma_{\mu\nu} = \gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu$ gesetzt], interessieren auch hier vom Operator O^S nur die Anteile, die von α und β in dieser Weise abhängen. Nur um diese soll es sich im folgenden handeln, und sie werden daher von jetzt ab einfach mit O^S bezeichnet.

Der Anfangszustand des FERMI-Teilchens sei Φ , sein Impuls P , der Endzustand Φ' und der zugehörige Impuls P' . Die Differenz

$$p = P' - P \quad (2)$$

stellt den Impuls dar, der in dem Wechselwirkungs-zopf übertragen wird. Betrachtet man, da es sich um Kräfte langer Reichweite handelt, den limes $p_\nu \rightarrow 0$, so kommt für den Operator O^S aus Gründen der relativistischen Invarianz zunächst nur die folgende allgemeine Form in Betracht. (Hierbei sind, wenn man an die Darstellung im Ortsraum denkt, die ortsabhängigen Teile weggelassen, für die im limes $p_\nu \rightarrow 0$ einfach der Faktor $\delta(x-y) \delta(x-y')$ eingesetzt werden kann.)

$$\begin{aligned} O_{\alpha\beta|q\sigma}^S = & C \frac{p_\nu}{\sqrt{p^2}} (i \gamma_{\mu\nu})_{\alpha\beta} (\gamma_\mu)_{q\sigma} \\ & + D (\gamma_{\mu\nu})_{\alpha\beta} (\gamma_{\mu\nu})_{q\sigma} \\ & + E \frac{p_\nu}{\sqrt{p^2}} (i \gamma_{\mu\nu} \gamma_5)_{\alpha\beta} (\gamma_\mu \gamma_5)_{q\sigma}. \end{aligned} \quad (3)$$

Würde man das FERMI-Teilchen in Abb. 1 durch ein BOSE-Teilchen vom Spin 0 ersetzen, so müßten die beiden letzten Zeilen in (3) verschwinden, da es Ausdrücke von dem entsprechenden Symmetriecharakter bei Teilchen vom Spin 0 nicht gibt. In der ersten Zeile wäre der Stromoperator $(\gamma_\mu)_{q\sigma}$ durch

$$\text{const} \cdot i \left(\frac{\partial}{\partial y_\mu} - \frac{\partial}{\partial y_\mu} \right)$$

zu ersetzen (dieser Ersatz wäre auch beim FERMI-Teilchen möglich und würde am Inhalt von Gl. (3) nichts ändern).

Es läßt sich aber auch bei FERMI-Teilchen unter gewissen Voraussetzungen zeigen, daß bei einer exakten Berechnung des Operators O^S die beiden letzten Zeilen in Gl. (3) verschwinden müssen, d. h. daß $D=E=0$ gelten muß. Wendet man zunächst die Operation der Ladungskonjugation auf die drei Zeilen von Gl. (3) an, so bleiben die ersten beiden Zeilen ungeändert, die letzte wechselt das Vorzeichen. Das letzte Glied würde also zu Anteilen an den Übergangselementen führen, die bei Ladungskonjugation das Vorzeichen wechseln, im Widerspruch zu den Symmetrieeigenschaften der Ausgangsgleichung

(1). Hieraus folgt

$$E = 0. \quad (4)$$

Ferner muß daran erinnert werden, daß nach den allgemeinen Überlegungen von III, Abs. 1 a, in einer gegebenen Näherung der G -Linienzug willkürlich festgesetzt werden kann und daß dann über alle zulässigen S -Linienbilder zu summieren ist. Nimmt man an, daß das ganze Verfahren konvergiert, und zwar in der Weise, daß es bei hinreichend hoher Näherung dem Grenzwert zustrebt, unabhängig von der speziellen Wahl des G -Linienzuges (also nicht etwa erst bei Mittelung über alle möglichen G -Linienzüge), so kann man den G -Linienzug insbesondere so wählen, daß die vom Anfangs- zum Endzustand des FERMI-Teilchens führende G -Linie vollständig durchverbunden ist (Verbindung zweier Linien bedeutet nach III, Abs. 1 a, Matrixmultiplikation der betreffenden G - bzw. S -Funktionen). In diesem Fall sind die Indizes α und β durch einen geschlossenen Linienzug im Graphen verbunden, wie es am Beispiel von Abb. 2 dargestellt ist. Die Spinrichtung des FERMI-Teilchens kann dann nicht in den geschlossenen Linienzug hinein übertragen werden, nur der Impuls des FERMI-Teilchens, der bei den Impulsintegrationen in den S - und G -Linien mit dem Linienzug verbunden wird, kann in den antisymmetrischen Tensor 2. Stufe eingehen, der durch den Linienzug dargestellt wird. Dieser Tensor muß dann die Form $\text{const} \cdot (p_\nu P_\mu - p_\mu P_\nu)$ haben, was nur für die erste Zeile in Gl. (3) zutrifft.

Wenn die Konvergenz nur eine bedingte ist⁷, d. h. nur bei Mittelung über alle möglichen G -Linienzüge eintritt – wir halten dies für das Wahrscheinlichere –, so bleibt das Gesagte auch noch richtig, wenn die Graphen, bei denen die Punkte α und β durch einen geschlossenen Linienzug verbunden sind, in der Anzahl weit überwiegen gegenüber jenen, bei denen dies nicht der Fall ist. Diese Voraussetzung dürfte wohl in hinreichend hoher Näherung immer zutreffen. Dann folgt allgemein:

$$D = 0, \quad (5)$$

$$O_{\alpha\beta|q\sigma}^S = C \frac{p_\nu}{\sqrt{p^2}} (i \gamma_{\mu\nu})_{\alpha\beta} (\gamma_\mu)_{q\sigma}. \quad (6)$$

Setzt man diesen Ausdruck in III, Gl. (78), ein, so erhält man statt III, Gl. (105), für die Übergangsamplitude die Formel:

⁷ Zu diesem Fragenkomplex sei insbesondere auf die Arbeit von P. T. MATHEWS u. A. SALAM, Proc. Roy. Soc., Lond. A 221, 128 [1954] verwiesen.

$$A = \frac{16 i \pi^2 (\kappa l)^4 a_2^2 \cdot 256 C^2}{(P-P')^2} [\bar{u}(P') \gamma_\mu u(P)] [\bar{u}(Q') \gamma_\mu u(Q)] \cdot \delta(P-P'+Q-Q') - \text{Austauschterm.} \quad (7)$$

Dies ist genau der Wechselwirkungsterm der gewöhnlichen Quantenelektrodynamik. Die Gl. (7) zeigt, daß die Quantenelektrodynamik weitgehend in der Ausgangsgleichung (1) enthalten ist. Die Ladung der FERMI-Teilchen ist ebenfalls durch (7) bestimmt, und zwar ergibt sich durch Vergleich mit III, Gl. (106), für die Feinstrukturkonstante der Wert

$$\alpha_F = \frac{64}{\pi^3} (\kappa l)^4 a_2^2 C^2. \quad (8)$$

Für die numerische Auswertung muß noch die Konstante C in Gl. (6) berechnet werden, die übrigen Konstanten sind schon in III ermittelt worden.

b) Berechnung der Konstante C

Bei dem Versuch zur Berechnung der Konstante C stößt man zunächst auf die Schwierigkeit, daß Graphen endlicher Ordnung von der Art der Abb. 1 und 2, wenn sie in der in III, Abs. 1 a, angegebenen Weise ausgewertet werden, überhaupt keinen Beitrag der Form (6) liefern. Dies ist verständlich, wenn

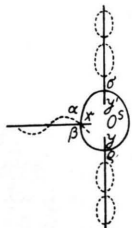


Abb. 1.

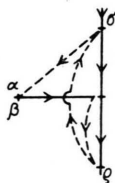


Abb. 2.

man daran denkt, daß auch die Wechselwirkungsoperatoren K und L in III, Ab. 2 c, nur durch das Übergehen zu einer in gewissem Sinne unendlich hohen Näherung ermittelt werden konnten. Daher müssen auch für die Berechnung von O^S Verfahren benützt werden, die, obwohl sie natürlich nicht exakt sein können, doch in einem gewissen Sinne unendlich hohe Näherungen der ursprünglichen Graphenmethode einschließen. Wir werden im folgenden zwei verschiedene derartige Verfahren versuchen und die Ergebnisse vergleichen.

Bei dem ersten Verfahren gehen wir aus von der τ -Funktion

$$\tau_{\mu\nu}(x|x) = \langle \Phi' | \psi_\alpha(x) (\gamma_{\mu\nu})_{\beta\alpha} \psi_\beta^+(x) | \Phi \rangle \quad (9)$$

und vergleichen sie mit dem Operator $O_{\mu\nu}^S | \Phi \rangle \Phi$, dann aus $O_{\alpha\beta}^S | \varrho \sigma$ erhält, indem man mit $(\gamma_{\mu\nu})_{\beta\alpha}$, dann rechts und links mit den Eigenfunktionen der Zustände Φ bzw. Φ' multipliziert. Die τ -Funktion (9) kann durch Graphen in der üblichen Weise auf andere τ -Funktionen zurückgeführt werden, und wir wählen dazu speziell Graphen, die zwei unendlich lange G -Linien enthalten, damit Bilder entstehen, die der Abb. 1 ähnlich sind. Bei der Berechnung der τ -Funktion muß über alle S -Linienbilder, die zu den gewählten G -Linien passen, summiert werden. Diese S -Linienbilder lassen sich in drei Gruppen zusammenfassen, und dementsprechend setzt sich $\tau_{\mu\nu}(x|x)$ aus drei Summanden zusammen. Bei der ersten Gruppe gibt es immer wieder Querverbindungen zwischen den beiden G -Linien (also unendlich viele solche Querverbindungen) in der in Abb. 3 a angedeuteten Art. Bei der zweiten und dritten Gruppe dagegen fehlen diese Querverbindungen von einer bestimmten Stelle ab auf den unendlich langen G -Linien, die G -Linien sind also schließlich getrennt. Bei der zweiten Gruppe ist die Anzahl der G - und S -Linien im Querschnitt jedes der beiden Zöpfe ungerade (d. h. die „Ladung“ ist ungerade) (vgl. Abb. 3 b), in der dritten ist sie gerade (vgl. Abb. 3 c).

Wenn es gelingt, die τ -Funktion (9) zu berechnen und in die genannten drei Summanden zu zerlegen, so genügt dies zur Berechnung von O^S , da der zweite Summand, der der Abb. 3b entspricht, in hinreichender Näherung mit O^S identifiziert werden kann.

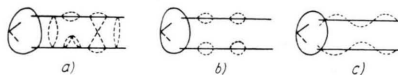


Abb. 3.

Zunächst kann man den ersten Summanden von den beiden anderen dadurch trennen, daß er zu Gliedern „kurzer Reichweite“ gehört, während die beiden anderen Gliedern langer Reichweite entsprechen. Damit ist folgendes gemeint: Wählt man die Zustände Φ und Φ' so, daß sie Wellenpakete darstellen, die nur in einem bestimmten Raumzeitgebiet überlappen, wählt ferner für x einen Punkt zur gleichen Zeit, der räumlich vom Überlappungsgebiet weit entfernt ist, so fallen die Glieder der Art 3 a mit diesem räumlichen Abstand sehr schnell ab.

während die Glieder 3b und 3c langsam abfallen. Denn der von x ausgehende Lichtkegel schneidet die Wellenpakete (oder richtiger: die diese Pakete darstellenden „Weltröhren“) an räumlich weit getrennten Gebieten, die im Falle 3a durch unendlich viele S -Linien verbunden werden müssen, was den Wert des Ausdrucks mit wachsendem Abstand sehr schnell verkleinert. Im Falle 3b und 3c fehlen diese S -Linien, der Abfall kann also viel langsamer erfolgen.

An den Enden der unendlich langen G -Linien in 3b und 3c müssen τ -Funktionen mit einer bzw. mit zwei Variablen eingesetzt werden. Im ersteren Fall (3b) kommt der weitaus größte Beitrag von den Gliedern, bei denen als Zwischenzustand das Vakuum gewählt wird, so daß die eine τ -Funktion dem Übergang $\Phi' \rightarrow \Omega$, die zweite dem Übergang $\Omega \rightarrow \Phi$ entspricht. Daher ist der Anteil 3b praktisch mit dem Operator O^S identisch und kann deshalb nur die Form (6) haben. Bei dem dritten Anteil 3c schließlich kommt der Hauptbeitrag von Zwischenzuständen Φ'' , die ein FERMI-Teilchen darstellen, dessen Impuls nur wenig von P und P' abweicht. Über diese Zwischenzustände muß summiert werden. Die an den Enden einzusetzenden τ -Funktionen haben also im wesentlichen die gleiche Form wie die gesuchte τ -Funktion (9).

Es wird sich später herausstellen, daß die Glieder der Form 3c zum Teil noch langsamer mit dem Abstand abfallen als die Glieder 3b. Wenn man jedoch über die Spinrichtung des FERMI-Teilchens im Anfangs- und Endzustand mittelt (was an den Anteilen 3b nichts ändert), so fallen diese Glieder ganz langer Reichweite fort. Wir wollen annehmen, daß — falls bei dieser Mittelung überhaupt noch Glieder in 3c übrigbleiben sollten, die auch die Form (6) haben — deren Beitrag klein ist gegenüber dem Beitrag von 3b. Wenn man diese Annahme nicht macht, die von 3c herrührenden Glieder der Form (6) also berücksichtigen wollte, so müßte man konsequenterweise auch bei den Eigenfunktionen der Lichtquanten die φ -Funktionen mit vier Variablen berücksichtigen, was bisher nicht geschehen ist. Wir glauben also, daß wir in dieser Näherung den Operator O^S einfach mit den Anteilen der τ -Funktion (9) identifizieren können, die die richtige Form (6) haben.

Nach diesen Vorbereitungen können wir an die Berechnung der τ -Funktion (9) gehen. Wir wollen sie auf die τ -Funktion

$$\tau_{\gamma\alpha\beta}(y|x) = \langle \Omega | \psi_\gamma(y) \psi_\alpha(x) \psi_\beta^+(x) | \Phi \rangle, \quad (10)$$

die in III, Abs. 1e, berechnet wurde, durch folgende Überlegung zurückführen. Zunächst gilt

$$\begin{aligned} \tau_{\gamma\alpha\beta}(y|x) &= \sum_{\Phi'} \langle \Omega | \psi_\gamma(y) | \Phi' \rangle \langle \Phi' | \psi_\alpha(x) \psi_\beta^+(x) | \Phi \rangle, \end{aligned} \quad (11)$$

wobei über alle möglichen Zwischenzustände zu summieren ist. Interessiert man sich speziell für die Glieder langer Reichweite, so wird der Hauptbeitrag von den Zwischenzuständen kommen, die ein FERMI-Teilchen der Masse κ darstellen, da nur für diese alle vier Komponenten der Impulsdifferenz $p = P' - P$ klein werden können. Multipliziert man daher $\tau_{\gamma\alpha\beta}(y|x)$ mit $e^{-i\mathfrak{P}'\eta}$ (wobei η die Raumkomponenten von y bedeuten soll) und integriert über η , so bleiben nur Zwischenzustände Φ' mit dem Impulsvektor P' über. Dabei soll das Koordinatensystem so gewählt werden, daß das FERMI-Teilchen sich vor und nach dem Stoß nur mit kleiner Geschwindigkeit bewegt ($|\mathfrak{P}| \sim |\mathfrak{P}'| \sim |\mathfrak{P} - \mathfrak{P}'| \ll \kappa$). Multipliziert man noch von links mit der Spineigenfunktion t_γ^+ des in (9) gemeinten Zustands Φ' , so folgt

$$\begin{aligned} t_\gamma^+ \int d\eta e^{-i\mathfrak{P}'\eta} \tau_{\gamma\alpha\beta}(\eta, t; x|x) &= t_\gamma^+ t_\gamma \cdot e^{-iP_0 t} \langle \Phi' | \psi_\alpha(x) \psi_\beta^+(x) | \Phi \rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

Dabei sollen zur Vereinfachung der Rechnung die Punkte x und y zur gleichen Zeit t gehören. [Wenn man in (12) eine Näherungslösung für $\tau(y|x)$ einsetzt, die aus der Annahme $\varphi(y|x) = 0$ gewonnen ist, so darf man nur kleine Zeitdifferenzen zwischen x und y zulassen, da sonst — wie früher¹ am Beispiel des anharmonischen Oszillators gezeigt worden ist — die Annahme $\varphi(y|x) = 0$ auch nicht mehr näherungsweise richtig wäre.]

Die Funktion $\tau(y|x)$ läßt sich nach dem üblichen Graphenschema [vgl. III, Gln. (21) und (22)] auf die Funktion $\tau(x)$ zurückführen. Von den 6 Graphen, die hier zu berücksichtigen sind [vgl. III, Gl. (23)], trägt nur einer, nämlich der in Abb. 4 dargestellte, zu den Gliedern der Form (6) bei.

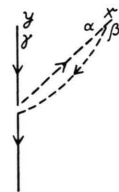


Abb. 4.

Nach Mittelung über die drei gleichberechtigten Linienzüge können wir also hier $\tau(y|x)$ durch

$$\tau_{\gamma\alpha\beta}(y|x) = -\frac{iI^2}{24} \int dz G_{\gamma\alpha}(y-z) S_{\alpha\beta}(z-x) S_{\alpha\alpha}(x-z) \tau_\alpha(z) + \dots \quad (13)$$

ersetzen. Da es sich nur um die Glieder langer Reichweite handelt, genügt es, in S beim Übergang zum Impulsraum jeweils nur die beiden höchsten Glieder in $1/p$ zu berücksichtigen. Ferner benützt man $\tau_\sigma(z) = t_\sigma \cdot e^{iP_\lambda z_\lambda}$. In dieser Näherung erhält man für (13), wenn wieder $\underline{p} = -i\gamma_\lambda p_\lambda$ gesetzt wird,

$$\tau_{\gamma\alpha\beta}(y|x) \approx -\frac{(\kappa l)^2}{3} (2\pi)^{-8} \int dq dr \frac{q_{r0}}{q^2} \left[\frac{\kappa r}{(r^2)^2} - \frac{1}{r^2} \right]_{\alpha\beta} \left\{ \frac{\kappa(P-q+r)}{[(P-q+r)^2]^2} - \frac{1}{(P-q+r)^2} \right\}_{\alpha\sigma} \cdot t_\sigma \cdot e^{iqy+i(P-q)x} + \text{Glieder kürzerer Reichweite.} \quad (14)$$

Setzt man (14) in (12) ein und multipliziert mit $(\gamma_{\mu\nu})_{\beta\alpha}$, so folgt:

$$t_\gamma^+ t_\gamma \langle \Phi' | \psi_\alpha(x) (\gamma_{\mu\nu})_{\beta\alpha} \psi_\beta^+(x) | \Phi \rangle \approx -\frac{(\kappa l)^2}{3} (2\pi)^{-5} e^{i(P-P')x} \cdot \int dq_0 dr t^* \frac{q}{q^2} \left[\frac{\kappa r}{(r^2)^2} - \frac{1}{r^2} \right] \gamma_{\mu\nu} \left\{ \frac{\kappa(P-q+r)}{[(P-q+r)^2]^2} - \frac{1}{(P-q+r)^2} \right\} t, \quad (15)$$

wobei q jetzt, nach der Integration über η , den Vektor \mathfrak{P}' , q_0 bedeutet. In (15) wird nur noch über q_0 und den Vektor r integriert. Das Zeichen \approx in (15) soll andeuten, daß sich die Gleichheit nur auf die Glieder der Form (6) bezieht. Beiträge zu (6) liefern nur die Glieder in (15), bei denen jeweils der größte Anteil der einen S -Funktion mit dem zweitgrößten der anderen multipliziert wird. (Das Produkt der beiden größten Glieder führt zu Ausdrücken, die sich für $p \rightarrow 0$ wie $1/p$ verhalten und daher zu dem Graphen 3c gehören müssen. Bei Mittelung über die Spinrichtung des FERMI-Teilchens fallen diese Glieder „sehr langer Reichweite“ fort.) Durch Integration über r folgt aus (15)

$$t_\gamma^+ t_\gamma \cdot O_{\mu\nu}^S | \Phi' \Phi \rangle \approx \frac{(\kappa l)^2}{3} (2\pi)^{-5} \cdot e^{i(P-P')x} \cdot i\pi^2 \kappa \int dq_0 t^* \frac{q}{q^2} \frac{\gamma_{\mu\nu}(P-q) - (P-q) \gamma_{\mu\nu}}{(P-q)^2} \cdot t. \quad (16)$$

Die für die Glieder langer Reichweite maßgebenden Pole von q_0 liegen bei $q_0 = P_0 \pm |\mathfrak{P} - \mathfrak{P}'|$. Dabei ist es, dem Charakter der S_F - bzw. G_F -Funktionen entsprechend, hier gleichgültig, ob man um den ersten Pol im negativen oder um den zweiten Pol im positiven Drehsinn integriert. Die Pole $q_0 = \pm |\mathfrak{P}'|$ tragen nicht zu den Gliedern langer Reichweite bei. Da ferner $|\mathfrak{P}| \sim |\mathfrak{P}'| \ll \kappa$ vorausgesetzt wurde, können wir uns mit den Operatoren $O_{4\nu}^S | \Phi' \Phi \rangle$ begnügen, für die man (wieder unter Weglassung der trivialen Exponentialfaktoren) aus (16) erhält:

$$O_{4\nu}^S | \Phi' \Phi \rangle = i \frac{(\kappa l)^2}{3} (2\pi)^{-5} \cdot \frac{P_\nu}{\sqrt{p^2}} \cdot 4\pi^3. \quad (17a)$$

Aus (17a) und (6) folgt schließlich

$$C = \frac{1}{96} \left(\frac{\kappa l}{2\pi} \right)^2. \quad (17b)$$

In dem eben beschriebenen Verfahren ist die für die Berechnung von O^S notwendige Einbeziehung „unendlich hoher“ Näherungen der normalen Rechenmethode dadurch bewerkstelligt worden, daß die τ -Funktion (9) von zwei Variablen auf die τ -Funktion (10) von drei Variablen zurückgeführt wurde, was von der normalen Rechenmethode grundsätzlich abweicht.

Das zweite Verfahren, das zur Berechnung von O^S versucht werden soll, geht davon aus, daß man die Ausgangsgleichung (1) auch in der Form

$$\gamma_\nu \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} + \kappa \psi = -l^2 \psi (\psi^+ \psi) + \kappa \psi \quad (18)$$

schreiben kann. Integriert man diese Gleichung mit G^* , der GREENSchen Funktion zur Masse κ , so erhält man ähnliche Graphenbilder wie beim bisherigen Verfahren, wobei jedoch gewisse reduzierbare Graphen jeweils durch die Glieder mit $\kappa \psi$ auf der rechten Seite kompensiert werden. Schon in der früheren Arbeit III, Abs. 1b, ist die Funktion G^* für die Berechnung der Streuwellen benützt worden. Es ist von vornherein schwer zu übersehen, wann das Rechnen mit den G^* -Funktionen eine Verbesserung der Näherung gegenüber dem üblichen Verfahren bedeutet. Aber da in der Theorie der Streuung nach III, Abs. 1b, doch für das auslaufende Teilchen mit der Funktion G^* gerechnet werden muß, scheint es plausibel, daß man auch vorher, im Wechselwirkungsteil des Graphen, die G -Linie, die in die auslaufende G^* -Linie einmündet, als G^* -Linie auffassen und dadurch unter Umständen eine bessere Näherung erzielen kann; daß man in dieser Weise also vielleicht die „unendlich hohen Näherungen“ des üblichen Verfahrens einbeziehen kann.

Die niedrigste Näherung, die dann Ausdrücke der Form (6) für O^S liefert, besteht aus Graphen vom Typus Abb. 5. Hier genügt es, in den Impulsdarstellungen der S-Funktionen nur jeweils das größte Glied $2i[\kappa^2/(p^2)^2]$ zu berücksichtigen. Man erhält dann für O^S Integrale von dem Typus

$$(2\pi)^{-8} (\kappa l)^4 \int dq dr t_\phi^* \frac{p+q}{(p+q)^2} \cdot \gamma_{\mu\nu} \frac{q}{(q^2)^2} \frac{r}{(r^2)^2} \frac{P+\kappa}{(q+r)^2 - 2P(q+r)} t_\phi, \quad (19)$$

die sich nach der FEYNMANSchen Methode ohne Schwierigkeiten auswerten lassen. Das Integral (19) liefert zu $O_{4\nu}^S$ einen Beitrag

$$- \frac{i\pi^2}{16} \left(\frac{\kappa l}{2\pi} \right)^4 \frac{p_\nu}{\sqrt{p^2}}.$$

Es gibt aber zwölf Graphen vom Typ der Abb. 5, die zur gleichen Näherung gehören. Die Beiträge dieser Graphen wechseln in der Größe etwa zwischen dem vier- und achtfachen des Betrages (17a) und haben auch verschiedene Vorzeichen. Bei der Mittelung über die zwölf gleichberechtigten Graphen aber ergibt sich Null, wenigstens soweit es sich um die Beiträge der Form (6) handelt. Dies mag damit zusammenhängen, daß Graphen der richtigen, in Abb. 2 angedeuteten topologischen Struktur in der Näherung von Abb. 5 noch gar nicht vorkommen. Jedenfalls läßt sich also aus dieser Näherung noch kein numerischer Wert für O^S bzw. C ermitteln.

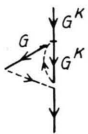


Abb. 5.

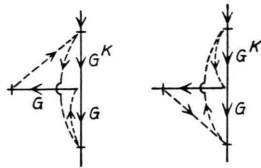


Abb. 6.

In der nächsten Näherung gibt es Graphen der richtigen, in Abb. 2 angedeuteten Struktur. Wenn man sich z. B. auf die G -Linienstruktur von Abb. 2 beschränkt und die beiden in Abb. 6 gezeichneten Graphen berechnet, die zu diesem G -Linienbild gehören, so erhält man für C den Wert

$$\left(\frac{\kappa l}{2\pi} \right)^6 \pi^2 \cdot 2^{-10},$$

der nicht ganz das Doppelte des Wertes von Gl. (17b) beträgt. Es scheint uns aber zu willkürlich, gerade die beiden Graphen von Abb. 6 auszuwählen und gerade an der bezeichneten Stelle die Funktion G^κ

einzusetzen. Andererseits gibt es in der Näherung von Abb. 6 schon eine so große Anzahl verschiedener zulässiger Graphen, daß eine Berechnung aller dieser Graphen und die nachfolgende Mittelung kaum mehr möglich sind. Wir können aus der zweiten Methode [Benutzung von Gl. (18)] also nur eine Bestätigung der Größenordnung des Wertes von Gl. (17b) entnehmen, müssen aber auf eine Verbesserung des numerischen Wertes verzichten.

Der Wert von C aus Gl. (17b) ist also wohl noch recht ungenau; wenn es aber nur auf die Größenordnung der Feinstrukturkonstante α_F ankommt, wird man sich mit diesem Genauigkeitsgrad begnügen können. Dann folgt aus (17b)

$$\alpha_F = \frac{\pi}{9} \left(\frac{\kappa l}{2\pi} \right)^8 a_2^2 = \frac{1}{267}. \quad (20)$$

Es ergibt sich also jedenfalls die richtige Größenordnung für die SOMMERFELDSche Feinstrukturkonstante; mehr läßt sich aus den bisherigen Rechnungen nicht entnehmen. Eine genaue Übereinstimmung mit dem empirischen Wert ist auch nicht zu erwarten, da die Ausgangsgleichung (1) noch nicht die richtige Wellengleichung der Materie sein kann.

Vielleicht sollte noch eine Bemerkung über die Kleinheit der Feinstrukturkonstante angefügt werden. Der numerische Wert in (20) ist natürlich völlig unabhängig von der (dimensionsbehafteten!) Kopplungskonstante l in Gl. (1). Die Kleinheit von α_F ist wohl in erster Linie durch die spezielle Form der Eigenfunktion des Lichtquants [s. III, Gl. (62)] und durch die dafür maßgebenden Bedingungen [s. III, Gln. (49), (50), (61)] verursacht. Denn bei der Berechnung des die Wechselwirkung vermittelnden Operators K [s. III, Abs. 2c] wurde an einer Stelle die Beziehung

$$\delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \sum_N \gamma_{\alpha\mu}^N \gamma_{\nu\beta}^N$$

benutzt [s. III, Gl. (97)], wobei rechts über alle 16 Elemente der DIRAC-Algebra zu summieren ist. Von diesen 16 Gliedern bleiben aber, wegen des speziellen Charakters der Lichtquanten-Eigenfunktionen, für die Wechselwirkung nur die vom Tensorcharakter übrig, und von denen auch nur die Hälfte, nämlich nur die Projektion von $\gamma_{\mu\nu}$ (hinsichtlich des einen Index) auf die Impulsdifferenz p_ν . Ein ähnlicher Auswahl-effekt spielt wohl auch bei der Ableitung der Operatoren O^S eine Rolle, ist aber dort nicht so unmittelbar zu erkennen. Jedenfalls sind die Gründe für die Kleinheit von α_F nicht an die

spezielle Form der Gl. (1) gebunden; vielmehr sind sie mit der Form des Integraloperators $G_F \cdot S_F$ in III, Gl. (47), verknüpft, der seinerseits durch die Einführung des HILBERT-Raums II bedingt ist.

Wenn man für die Kräfte kurzer Reichweite eine Kopplungskonstante ähnlich der Feinstrukturkonstante definieren wollte, so würde sich für diese wohl die Größenordnung 1 ergeben, da es Bosonen der verschiedensten Symmetrieeigenschaften gibt, die genannten Einschränkungen also wegfallen. Es muß aber hervorgehoben werden, daß eine Trennung der Kräfte kurzer Reichweite in die Beiträge der verschiedenen Bosonensorten grundsätzlich gar nicht möglich ist.

c) Der Erhaltungssatz für die Ladung und die Maxwell'schen Gleichungen

Die bisherigen Rechnungen zeigen zwar, daß zwischen zwei FERMI-Teilchen die übliche elektromagnetische Wechselwirkung besteht und daß die Ladung des Fermions durch (20) gegeben ist, sie beweisen aber noch nicht, daß die Ladung bei Stoßprozessen allgemein erhalten bleibt und daß die Ladung irgendeines Elementarteilchens (z. B. auch eines Bosons) stets ein ganzzahliges Vielfaches dieser Elementarladung sein muß. Diese Lücke läßt sich aber leicht ausfüllen. Zunächst folgt aus (6), daß für den Stromoperator j_μ hier nicht einfach der übliche Ausdruck $\psi^+ \gamma_\mu \psi$ gesetzt werden darf, sondern daß gilt:

$$\langle \Phi' | j_\mu(x) | \Phi \rangle = \text{const} \cdot \square^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x_\nu} O_{\mu\nu}^S | \Phi' \Phi \rangle (x), \quad (21)$$

wobei der Operator $\square^{-1/2} (\partial/\partial x_\nu)$ dem Ausdruck $p_\nu/\sqrt{p^2}$ in Gl. (6) entspricht. Für den Erhaltungssatz der Ladung genügt es, sich auf die Übergangselemente $\Phi' \rightarrow \Phi$ zu beschränken, bei denen Φ und Φ' zur gleichen Masse gehören und sich nur um sehr geringe Impulsdifferenzen unterscheiden, da die Ladung ja durch die sehr geringe Ablenkung eines in sehr weiter Entfernung vorbeifliegenden Probekörpers definiert werden kann. Aus Gl. (21) folgt sofort:

$$\left\langle \Phi' \left| \frac{\partial j_\mu(x)}{\partial x_\mu} \right| \Phi \right\rangle = 0, \quad (22)$$

da $O_{\mu\nu}^S | \Phi' \Phi \rangle$ ein in μ und ν antimetrischer Tensor ist, und damit die Erhaltung der Ladung. Da ferner alle Elementarteilchen, wie das Graphenschema zeigt, als aus Fermionen zusammengesetzt aufgefaßt werden

können, müssen die Ladungen der Elementarteilchen stets ganzzahlige Vielfache der Elementarladung sein. Insbesondere sind z. B. die in der früheren Arbeit III berechneten Bosonen elektrisch neutral. Die Antiteilchen der Fermionen haben die gleiche, aber im Vorzeichen entgegengesetzte Ladung wie die Fermionen.

Es muß besonders darauf hingewiesen werden, daß der Erhaltungssatz für die Ladung hier — im Gegensatz zur üblichen Theorie — nicht mit der Invarianz der Grundgleichung gegenüber der Operation $\psi \rightarrow \psi e^{iz}$ zusammenhängt. Diese letztere Invarianz wird in der richtigen Theorie der Materie wahrscheinlich die Erhaltung der Nukleonenzahl liefern. Die Erhaltung der elektromagnetischen Ladung aber beruht in der vorliegenden Theorie auf der Antimetrie des Tensors $O_{\mu\nu}^S | \Phi' \Phi \rangle$, also auf der Antimetrie der Eigenfunktion des Photons (vgl. III, Abs. 2 b und c), die hier im wesentlichen $F_{\mu\nu}$ und nicht A_μ lautet, d. h. schließlich auf der Identität $\partial^2 F_{\mu\nu}/\partial x_\mu \partial x_\nu = 0$.

Daß das hier besprochene, durch Gl. (1) definierte Modell tatsächlich die Elektrodynamik enthält, läßt sich auch unmittelbar in der Weise zeigen, daß man die Operatoren aufweist, die den $F_{\mu\nu}$ der Quantenelektrodynamik entsprechen und für die die MAXWELLSchen Gleichungen gelten.

Ebenso wie in vielen üblichen Fassungen der Quantenelektrodynamik wollen wir $F_{\mu\nu}$ in zwei Anteile zerlegen

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^{(1)} + F_{\mu\nu}^{(2)}, \quad (23)$$

wobei der erste $F_{\mu\nu}^{(1)}$ den MAXWELL-Gleichungen des Vakuums genügt und nur Übergangselemente enthält, die zur Entstehung oder Vernichtung eines Lichtquants gehören. Der zweite Anteil gibt sozusagen das von den Ladungen induzierte Feld an, er genügt den MAXWELL-Gleichungen mit äußerer Strom- und Ladungsdichte, und enthält nur Übergangselemente, bei denen die Ladungsträger ihren Zustand verändern, also z. B. vom Impuls P zum Impuls P' übergehen ($P - P'$ ist dann immer ein raumartiger Vektor).

In der vorliegenden Theorie gilt dann, wenn Ψ einen Zustand mit einem Lichtquant bezeichnet:

$$\langle \Omega | F_{\mu\nu}^{(1)} | \Psi \rangle = \text{const} \cdot \langle \Omega | \psi^+ \gamma_{\mu\nu} \psi | \Psi \rangle. \quad (24)$$

Wenn Φ und Φ' Anfangs- und Endzustand des Ladungsträgers darstellen, kann ferner

$$\langle \Phi' | F_{\mu\nu}^{(2)} | \Phi \rangle = \text{const} \cdot \square^{-1/2} O_{\mu\nu}^S | \Phi' \Phi \rangle \quad (25)$$

gesetzt werden. Die Ausrechnung der konstanten Faktoren soll hier nicht durchgeführt werden. Die Gültigkeit der MAXWELLSchen Gleichungen läßt sich mit Hilfe von III, Abs. 2b, und von (16) bis (17b) und (21) leicht verifizieren.

2. Vorzeichenfragen

Die frühere Arbeit III, in der die mathematischen Methoden zur Behandlung der Ausgangsgleichung (1) ausführlich dargestellt wurden, enthält, wie sich insbesondere durch eine Note von KITA⁸ herausgestellt hat, noch einige Vorzeichenfehler, die im folgenden besprochen werden sollen.

Zunächst war in III, S. 429, angegeben worden, daß für eine S-Linie im Graphen bei der Integration der Ausdruck $\frac{1}{2} S_F$ eingesetzt werden sollte. Nun gilt aber, wenn man sich an die üblichen Definitionen hält,

$$\langle \Omega | T \psi_a(x) \psi_\beta^+(y) | \Omega \rangle = -\frac{1}{2} S_F^{a\beta}(x-y); \quad (26)$$

also muß für jede S-Linie der Ausdruck $-\frac{1}{2} S_F$ statt $+\frac{1}{2} S_F$ in das betreffende Integral eingesetzt werden. Der so entstandene Fehler kann in den Rechnungen von III am einfachsten dadurch beseitigt werden, daß in der Ausgangsgleichung eine Vorzeichenänderung vorgenommen wird. Denn da die Anzahl der S- und der G-Linien in den dort behandelten Graphen stets gleich ist, kann man eine Vorzeichenänderung von S auch durch eine Vorzeichenänderung im Ausdruck $(-i l^2/2) \cdot G_F$ ersetzen. Also kann man einfach erklären, daß sich die Rechnungen von III, wenn man die üblichen Definitionen beibehält, nicht auf die Grundgleichung (1), sondern auf die Gleichung

$$\gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} - l^2 \psi (\psi^+ \psi) = 0 \quad (27)$$

bezogen haben, dann ist der Vorzeichenfehler damit beseitigt. Auch die Rechnungen von III, Abs. 1, beziehen sich daher bei Verwendung der Gl. (26) auf diese Grundgleichung (27).

Ernster ist der Vorzeichenfehler, den KITA⁸ in III, Abs. 2e, gefunden hat. Hier war versucht worden, einen Anhaltspunkt für das asymptotische Verhalten von S_F zu gewinnen, indem auf die Gl. (26) einmal die Operation $\gamma_\mu (\partial/\partial x_\mu)$, dann die Opera-

tion $(\partial/\partial y_\mu) \gamma_\mu$ angewendet und in der entstehenden τ -Funktion von 6 Variablen alle Kontraktionen ausgeführt wurden. So waren die Gln. (159) und (160) entstanden. Bei richtiger Rechnung unter Berücksichtigung von (26) muß aber in Gl. (159) das Vorzeichen umgekehrt werden, woraus in Gl. (161) ein negativer Wert von Z^2 folgen würde.

Eine nähere Untersuchung dieser Zusammenhänge zeigt, daß man das asymptotische Verhalten von S_F wohl überhaupt nicht in dieser Weise ermitteln kann. Denn beim einmaligen Differenzieren von S_F entsteht eine τ -Funktion von vier Variablen vom Typus $\tau(x x | y x)$ [in III, Gl. (159), $\sigma(z)$ genannt], die in diesem speziellen Fall wegen $S(0)=0$ mit der entsprechenden φ -Funktion von vier Variablen identisch ist. Auf der linken Seite von III, Gl. (160), steht also der Differentialquotient einer φ -Funktion von vier Variablen. Wenn man auf der rechten Seite dieser Gleichung alle Kontraktionen vornimmt, so bedeutet dies aber, daß man rechts alle φ -Funktionen von vier Variablen gestrichen hat. Man kann jedoch keine brauchbare Gleichung erhalten, wenn man links die φ -Funktion von vier Variablen berücksichtigt, sie rechts dagegen vernachlässigt. Daher ist das Gleichungssystem (159) und (160) inkonsequent und in dieser Form nicht zu brauchen.

Hier zeigt sich eine charakteristische Schwierigkeit, die den meisten Approximationsmethoden der Quantentheorie anhaftet. Es ist verhältnismäßig leicht, brauchbare Näherungen für Eigenwerte zu erhalten, selbst wenn die dabei benützten Eigenfunktionen noch sehr ungenau sind. Es ist aber sehr schwierig, in dieser Weise Aufschluß zu bekommen über den Wert der Eigenfunktion an einer bestimmten Raumstelle. Für die Bestimmung einer Funktion vom Typus $\varphi(x x | y x)$ wären umfangreiche Untersuchungen nötig, die bisher noch nicht durchgeführt worden sind. Daher muß die Frage, ob die Funktion S_F in ihrer Näherungsdarstellung von III, Gl. (7), auch die nichtlinearen Integralgleichungen vom Typus der Gl. (156) in III näherungsweise befriedigt, einstweilen offengelassen werden.

3. Erweiterung des Modells in Richtung auf die Theorie der wirklichen Elementarteilchen

a) Einführung des Isotopenspins

Die Grundgleichung (1) bzw. (27) kann noch nicht die richtige Gleichung der Materie sein, da in ihr ein bei den wirklichen Elementarteilchen auf-

⁸ H. KITA, Progr. Theor. Phys. 15, 83 [1956].

tretender Freiheitsgrad, der Isotopenspin, noch nicht berücksichtigt ist. Man kann daher die Frage aufwerfen, welche Erweiterungen man an Gl. (1) bzw. (27) vornehmen muß, um zum mindesten qualitativ das Verhalten der wirklichen Elementarteilchen darzustellen.

Da in dem studierten Modell der Hauptanteil des Operators $\psi(x)$ durch den Erzeugungsoperator des Nukleons gegeben war, wird man die Wellenfunktion der Materie in der erweiterten Theorie als einen Spinor im gewöhnlichen Raum und im Isotopenspinraum (also als eine Wellenfunktion mit 8 Komponenten) einführen. Dies genügt aber sicher noch nicht, um das empirische Spektrum der Elementarteilchen zu gewinnen. Denn wenn es in der Grundgleichung nur einen Operator $\psi(x)$ gäbe, der ein Spinor im gewöhnlichen und im Isotopenspinraum ist, so müßten alle Elementarteilchen mit halbzahligen Spin auch halbzahligen Isotopenspin besitzen, alle Teilchen mit ganzzahligem Spin auch ganzzahligen Isotopenspin. Nach den Untersuchungen von GELL-MANN⁹, NAKANO und NISHIJIMA¹⁰, PAIS¹¹ und anderen kann man aber die empirischen Auswahlregeln für K-Mesonen und Hyperonen am besten durch die Annahme deuten, daß diese beiden Eigenschaften völlig unabhängig sind, daß also z. B. die K-Mesonen den Spin 0, aber halbzahligen Isotopenspin besitzen.

Wenn diese Deutung der Mesoneneigenschaften richtig ist, so muß man neben der genannten Wellenfunktion $\psi(x)$, die ein Spinor in beiden Räumen ist, noch mindestens eine weitere Größe einführen, die ein Skalar im gewöhnlichen Raum und ein Spinor im Isotopenspinraum, oder ein Spinor im gewöhnlichen Raum und ein Skalar im Isotopenspinraum ist (vgl. die Untersuchungen von GOLDHABER¹²).

Wenn man sich für die zweite Alternative entscheidet, so kann man die Theorie weitgehend ähnlich zu der des bisher behandelten Modells entwickeln. Wir wollen also einen zweiten Spinor $\chi(x)$ einführen, der im Isotopenspinraum ein Skalar ist.

Um einen Einblick in die qualitative Form der Grundgleichungen zu erhalten, kann man die empirisch bekannten Wechselwirkungen zwischen den Elementarteilchen als Ausgangspunkt benützen. Man unterscheidet drei Arten der Wechselwirkung: Die starke Wechselwirkung, die z. B. zwischen Nukleo-

nen, Mesonen und Hyperonen besteht; die elektromagnetische Wechselwirkung; und schließlich die schwache Wechselwirkung, die für den radioaktiven Zerfall verschiedener Teilchen, z. B. den β -Zerfall, maßgebend ist. Die Kopplungskonstanten der schwachen Wechselwirkung sind um viele Zehnerpotenzen kleiner als normale nukleare Konstanten gleicher Dimension. Auf die Massen der Elementarteilchen wird diese Wechselwirkung also praktisch keinen Einfluß ausüben. Daher wird man zweckmäßig die schwache Wechselwirkung zunächst ganz vernachlässigen und später als kleine Störung wieder einführen. In dieser Näherung sind also die meisten radioaktiven Zerfälle durch Auswahlregeln verboten. Die elektromagnetischen Wechselwirkungen kann man nicht von den starken Wechselwirkungen trennen, da sie ja nach dem Modell eine Folge der letzteren sind. Aber nach den Experimenten sieht es so aus, als seien die starken Wechselwirkungen invariant gegenüber beliebigen Drehungen im Isotopenspinraum, während die elektromagnetischen Wechselwirkungen nur invariant gegen Rotationen um die z -Achse dieses Raumes sind. Dieses Verhalten kann man vielleicht durch die Annahme darstellen, daß die Wellengleichung die volle Rotations-symmetrie im Isotopenspinraum besitzt, während die Vertauschungsrelationen nur gegen die Untergruppe der Rotationen um die z -Achse invariant sind.

Als ein qualitativ brauchbares Beispiel können die folgenden beiden Gleichungen gelten:

$$L = \psi^\dagger \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi + \chi^\dagger \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \chi + l^2 (\psi^\dagger \chi) (\chi^\dagger \psi), \quad (28)$$

$$S^\psi(p) \approx 2i \left[\frac{p \kappa^4}{(p^2)^2 (p^2 + \kappa^2)} - \frac{\kappa^3 \tau_3}{p^2 (p^2 + \kappa^2)} \right]. \quad (29)$$

L ist die zur Wellengleichung gehörige LAGRANGE-Funktion, τ_3 die z -Komponente des Isotopenspins. Gl. (29) stellt die Vertauschungsrelationen der ψ in der Näherung dar, in der nur eine Fermionensorte halbzahligen Isotopenspins der Masse κ berücksichtigt wird. Für die Vertauschungsrelationen der χ , die ja im Isotopenspinraum skalar sind, sollen die Vertauschungsrelationen des früheren Modells gelten. Da die elektromagnetischen Wechselwirkungen gerade mit dem zweiten Term der Vertauschungsrelationen verknüpft sind, kann man annehmen, daß dieser Term die Massen nicht allzu stark beeinflusst; daß die Massenwerte also in der Tat zu relativ engen

⁹ M. GELL-MANN, Phys. Rev. **92**, 833 [1953].

¹⁰ T. NAKANO u. K. NISHIJIMA, Progr. Theor. Phys. **10**, 581 [1953].

¹¹ A. PAIS, Phys. Rev. **86**, 663 [1952].

¹² M. GOLDHABER, Phys. Rev. **101**, 433 [1956].

Multipletts zusammengeordnet sind, die jeweils zu einem Wert des Gesamtisotopenspins gehören, wie es beobachtet wird. Aber quantitativ ist dieser Gedanke bisher nicht durchgeführt worden.

Wenn man die beiden Gln. (28) und (29) zugrunde legt, so würde man die Zustandsvektoren der verschiedenen Elementarteilchen qualitativ in folgender Weise darzustellen versuchen (dabei sind die kontravarianten Eigenfunktionen, die mit den Operatoren ψ und χ multipliziert sind, und die höheren Glieder immer weggelassen):

$$\begin{array}{ll}
 \text{Nukleon} & (\psi^+ + \dots) | \Omega \rangle \\
 \text{Antinukleon} & (\psi + \dots) | \Omega \rangle \\
 A_0 & (\chi^+ + \dots) | \Omega \rangle \\
 \bar{A}_0 & (\chi + \dots) | \Omega \rangle \\
 \pi\text{-Meson} & (\psi^+ \psi + \dots) | \Omega \rangle \\
 \Theta\text{-Meson} & (\psi^+ \chi + \dots) | \Omega \rangle \\
 \bar{\Theta}\text{-Meson} & (\chi^+ \psi + \dots) | \Omega \rangle \\
 \text{Photon} & (\psi^+ \psi + \dots) | \Omega \rangle \\
 \Sigma & (\chi^+ \psi^+ \psi + \dots) | \Omega \rangle \\
 \Xi & (\chi^+ \chi^+ \psi + \dots) | \Omega \rangle
 \end{array} \quad (30)$$

Diese Darstellung ist offenbar der GOLDBERGER¹² aufs engste verwandt. Durch die Gln. (28) und (29) werden dann die empirisch bekannten Auswahlregeln in folgender Weise wiedergegeben:

Zunächst sorgt die LORENTZ-Invarianz der Gleichungen in der üblichen Weise für die Erhaltung von Energie und Impuls, Drehimpuls und Parität. Dann bleibt wegen der Rotationssymmetrie um die z -Achse die z -Komponente des Isotopenspins streng erhalten. Ebenso gilt nach Abs. 1 c der Erhaltungssatz der Ladung. Die Erhaltung der Baryonenzahl entspricht der Invarianz der Gln. (28) und (29) gegen die Transformation $\psi \rightarrow \psi e^{i\alpha}$, $\chi \rightarrow \chi e^{i\alpha}$. (Die Invarianz der Gleichungen ist noch etwas allgemeiner und gilt auch für die Transformation $\psi \rightarrow \psi e^{i\alpha}$, $\chi \rightarrow \chi e^{i\beta}$.) Dies genügt für die Darstellung der mit dem Begriff „strangeness-quantum-number“ verknüpften Erfahrungen. Es ist nicht nötig, noch neue Symmetrieeigenschaften zur Deutung dieser Erfahrungen heranzuziehen, wie RACAH¹³ sowie ESPAGNAT und PRENTKI¹⁴ es versucht haben. Der Gesamtisotopenspin bleibt nicht notwendig erhalten, jedoch werden Übergänge, bei denen er sich ändert, erheblich seltener vorkommen als solche, bei denen er konstant bleibt. Im ganzen geben also Gleichungen von der Art der Gln. (28) und (29) qualitativ

das Verhalten der Nukleonen, Hyperonen, π - und Θ -Mesonen richtig wieder, sofern man die Frage des radioaktiven Zerfalls einstweilen beiseite läßt. Die Einordnung der Leptonen bleibt aber noch unklar.

b) Die kleinen Wechselwirkungen

Man kann weiter die Frage aufwerfen, welche Symmetrieeigenschaften die kleinen Zusatzterme haben müssen, die für die schwachen Wechselwirkungen maßgebend sind. Das wichtigste Charakteristikum dieser Wechselwirkungen ist der Umstand, daß sie die z -Komponente des Isotopenspins um $\pm \frac{1}{2}$ ändern, ohne Übergänge der anderen Quantenzahlen hervorzurufen. Daher müssen die Wechselwirkungsterme in der LAGRANGE-Funktion Spinoren im Isotopenraum sein, soweit sie von ψ und χ abhängen. Man kann also etwa an Ausdrücke der Form

$$\text{const} \cdot [(\psi^+ \chi)(\psi^+ \psi) + \text{conj.}] \quad (31)$$

denken. Da die Konstanten hier auch in einem gewissen Sinn Spinoren im Isotopenspinraum sind, ergibt sich eine merkwürdige Folgerung. Führt man eine Drehung im Isotopenraum um 360° aus, so ändern die Wechselwirkungsglieder ihre Vorzeichen. Daher muß man die Ausdrücke mit einem unbestimmten Vorzeichen \pm versehen, die beiden Werte des Vorzeichens sind völlig äquivalent. Daraus folgt aber, daß auch Ausdrücke der Form

$$\pm \text{const} \cdot [(\psi^+ \chi)(\psi^+ \gamma_5 \psi) + \text{conj.}] \quad (32)$$

zugelassen werden können. Bei Spiegelung im Raum wechseln diese Glieder zwar das Vorzeichen, gehen aber eben deswegen in sich über; d. h. die Ausdrücke (32) sind ebenfalls in einem gewissen Sinne gegen Spiegelung invariant. Wenn nun Glieder der beiden Arten (31) und (32) vorhanden sind, so erkennt man sofort, daß die Θ -Mesonen von (30) sowohl in zwei als auch in drei π -Mesonen zerfallen können. Denn die Glieder der einen Art können den Zerfall der Θ -Mesonen in zwei π -Mesonen, die der anderen Art den in drei π -Mesonen bewerkstelligen. Bei Wechselwirkungen, die den Isotopenspin um $\pm \frac{1}{2}$ ändern und insofern quantenmechanisch sehr ungewöhnlich sind, ergibt sich also die merkwürdige Konsequenz, daß die bloße Addition von zwei der Symmetrie nach zulässigen Gliedern bereits einen Schraubensinn auszeichnet. Die Diskussionen dieses

¹³ G. RACAH, Nuclear Phys. 1, 301 [1956].

¹⁴ B. D'ESPAGNAT u. J. PRENTKI, Nuclear Phys. 1, 33 [1956].

Abschnitts sprechen also für die von LEE und YANG¹⁵ im Zusammenhang mit den τ -Mesonen vertretene These, daß die Parität beim radioaktiven Zerfall nicht allgemein erhalten bleibt.

c) Einordnung der Leptonen

Die Leptonen scheinen mit den schwereren Elementarteilchen nicht durch eine starke Wechselwirkung verbunden zu sein; aber jedenfalls gibt es die durch die elektromagnetischen Kräfte hervorgerufene Paarerzeugung der Elektronen und wohl auch der μ -Mesonen. Daraus geht hervor, daß die Grundgleichungen der Materie — auch bei Vernachlässigung der schwachen Wechselwirkungen — die Lep-

tonen in ihrem Massenspektrum enthalten müssen. Auch die relativ große Masse des μ -Mesons spricht dafür, daß die großen Wechselwirkungen für die Massen der Leptonen in erster Linie verantwortlich sind. Dies muß bedeuten, daß die Abschließung der Leptonen von den schwereren Elementarteilchen durch weitere Auswahlregeln und Übergangsverbote bewirkt wird, die bisher noch nicht formuliert worden sind. Es mag sein, daß man zur Darstellung der Leptonen noch eine weitere Wellenfunktion in die Grundgleichungen einführen muß; vielleicht bringt aber auch eine nähere Untersuchung der durch den HILBERT-Raum II in die Theorie eingeführten Züge weitere Symmetrieeigenschaften ans Licht, die zur Deutung jener Auswahlregeln genügen.

¹⁵ T. D. LEE u. C. N. YANG, Phys. Rev. **102**, 290 [1956].

Kernpolarisation und Ebbe-Flut-Effekt beim μ^- -Meson-Atom

Von E. NUDING

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforsch. **12 a**, 187—194 [1957]; eingegangen am 6. Dezember 1956)

Der Einfluß der Polarisation des Atomkerns auf die 1s-, 2p- und 3d-Energieniveaus des μ^- -Meson-Atoms wird im Rahmen einer Störungsrechnung II. Ordnung unter Zugrundelegung des STEINWEDEL-JENSENSchen Kernmodells für die Elemente Sb, W, Pb, U berechnet. Die Ergebnisse (Tab. 1) sind im Rahmen des Kernmodells auf etwa 5% genau. Die Korrektur der Termdifferenz 2p—1s erweist sich bei den betrachteten Elementen als nahezu unabhängig von Z und beträgt etwa 5 keV.

Die Abschätzung eines Ebbe-Flut-Effektes ergab bei denselben Elementen für den 1s-Zustand im Vergleich zum Polarisations-effekt überraschend hohe Korrekturen (Tab. 2) von etwa 10 keV.

FITCH und RAINWATER¹ haben 1953 die Energie des 2p—1s-Überganges beim μ^- -Meson-Atom für verschiedene Elemente gemessen und dabei eine Genauigkeit von etwa 1% relativen Fehler erzielt. Höhere Übergänge wurden von DE BENEDETTI et al.² untersucht.

Bei der Berechnung der Energieterme des μ^- -Meson-Atoms muß insbesondere beim 1s-Zustand der Einfluß der endlichen Ausdehnung des Atomkerns berücksichtigt werden, worauf schon 1949 von WHEELER³ hingewiesen wurde. Er bewirkt z. B. bei Pb eine Änderung des 1s-Niveaus von -20 MeV auf etwa -11 MeV, während beim 2p-Zustand die Korrektur nur noch etwa 3% beträgt.

Weitere störende Einflüsse auf die Lage der Energieniveaus, deren Beiträge etwa in der Größenordnung der Meßgenauigkeit liegen, wurden von verschiedenen Autoren untersucht^{1, 4, 5}. Eine Zusammenstellung der Ergebnisse findet sich bei HILL und FORD⁶. Im folgenden soll die Polarisationswirkung des Mesons auf den Kern genauer berechnet werden.

COOPER und HENLEY⁴ haben auf Grund des Einteilchenmodells des Atomkerns eine Abschätzung des Polarisations-effektes angegeben, und zwar für den 1s-Zustand von $Z=82$ $\Delta E_{1s} = -60$ keV. LAKIN und KOHN⁷ fanden mit Hilfe des STEINWEDEL-JENSENSchen Kernmodells für den 1s-Zustand von

¹ V. L. FITCH u. J. RAINWATER, Phys. Rev. **92**, 789 [1953].

² S. DE BENEDETTI et al., Phys. Rev. **94**, 766 [1954]; **97**, 240 [1955]. S. a. S. KOSLOV, V. L. FITCH u. J. RAINWATER, Phys. Rev. **95**, 625 [1954].

³ J. A. WHEELER, Rev. Mod. Phys. **21**, 133 [1949].

⁴ L. N. COOPER u. E. M. HENLEY, Phys. Rev. **92**, 801 [1953].

⁵ H. C. CORBEN, Phys. Rev. **94**, 787 [1954].

⁶ D. L. HILL u. K. W. FORD, Phys. Rev. **94**, 1619 [1954].

⁷ W. LAKIN u. W. KOHN, Phys. Rev. **94**, 787 [1954].